2015年 医学部 第5問

$\boxed{5}$ 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 a で最大のものを求めよ．

$(*)$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1 - ax^2$ が成り立つ．

$$\cos x \leqq 1 - ax^2 \iff \frac{1-\cos x}{x^2} \geqq a \quad (x \neq 0)$$

$x=0$ のときは成り立つ

よって．$(*) \iff$ $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のすべての x に対して．$\dfrac{1-\cos x}{x^2} \geqq a$

$f(x)$：偶関数より　　$= f(x)$ とおく

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x^2 - (1-\cos x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

$$g(x) = x\sin x + 2\cos x - 2$$

$$g'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x$$
$$= x\cos x - \sin x$$

$$g''(x) = -x\sin x$$

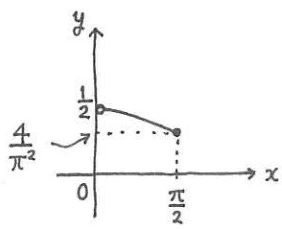
$\therefore$ $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき．$g''(x) < 0$　$\therefore$ $g'(x)$ は単調減少

$g'(0) = 0$ なので，$g'(x) < 0$　$\therefore$ $g(x)$ は単調減少

$g(0) = 0$ なので，$g(x) < 0$　すなわち．$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において．$f'(x) < 0$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$
$$= \frac{1}{2}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$\frac{4}{\pi^2}$



$\therefore$ 増減表より．グラフは右のようになる．

$\therefore$ $a \leqq \dfrac{4}{\pi^2}$　　$\therefore$ 最大のものは．$a = \dfrac{4}{\pi^2}$ //