0001742637528999

福岡大学

2012年 工・薬学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $0<k<2$ とする．曲線 $C: y=x^2$ 上を動く点Pと，直線 $y=2k(x-1)$ 上を動く点Qとの距離が最小となるとき，点Pの座標を k の式で表すと $\boxed{}$ である．このときの直線PQと曲線 C とで囲まれる部分の面積が最小になる k の値を求めると，$k=$ $\boxed{}$ である．

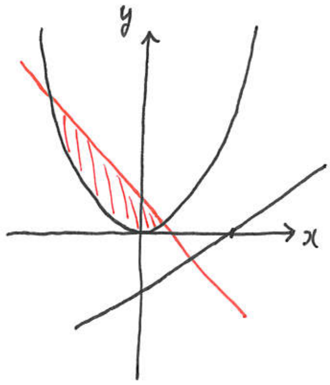
$P(t, t^2)$ とおくと．直線 $2kx-y-2k=0$ とのキョリ d は

点と直線のキョリ公式より

$$d=\frac{|2kt-t^2-2k|}{\sqrt{4k^2+1}}=\frac{|-(t-k)^2+k^2-2k|}{\sqrt{4k^2+1}}$$

$0<k<2$ より． $d=\dfrac{(t-k)^2-k^2+2k}{\sqrt{4k^2+1}}$ ∴ d が最小となるのは $t=k$ のとき．

このとき． $\underline{P(k, k^2)}$ //



直線PQは $y=-\dfrac{1}{2k}(x-k)+k^2$

∴ $y=-\dfrac{1}{2k}x+k^2+\dfrac{1}{2}$

∴ CとPQの交点のx座標を求めると

$x^2+\dfrac{1}{2k}x-k^2-\dfrac{1}{2}=0$ ∴ $x=\dfrac{-\frac{1}{2k}\pm\sqrt{\frac{1}{4k^2}-4\left(-k^2-\frac{1}{2}\right)}}{2}$

$=-\dfrac{1}{4k}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(2k+\dfrac{1}{2k}\right)^2}$

$=k,\ -\left(k+\dfrac{1}{2k}\right)$

$$\therefore S=\int_{-(k+\frac{1}{2k})}^{k} -\frac{1}{2k}x+k^2+\frac{1}{2}-x^2\,dx$$

$$=-\int_{-(k+\frac{1}{2k})}^{k}(x-k)\left\{x+\left(k+\frac{1}{2k}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\left\{k+\left(k+\frac{1}{2k}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2k+\frac{1}{2k}\right)^3$$

相加平均・相乗平均の関係より

$2k+\dfrac{1}{2k}\geqq 2\sqrt{2k\cdot\dfrac{1}{2k}}=2$

等号成立は $2k=\dfrac{1}{2k}$ すなわち $\underline{k=\dfrac{1}{2}\text{ のとき}}$ //