0002054365497999

甲南大学

2015年 理系2 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1=1$, $b_1=1$ であり，次の関係式を満たす．

$$a_{n+1}=3a_n+b_n+1,\quad b_{n+1}=2a_n+4b_n-1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n+b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{2a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(1) $a_{n+1}=3a_n+b_n+1$ …①

$b_{n+1}=2a_n+4b_n-1$ …②

①＋②より．$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

∴ 数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=2$，公比5の等比数列となる．

よって．$\underline{a_n+b_n=2\cdot 5^{n-1}}$ //

(2) ①×2−②より．$2a_{n+1}-b_{n+1}=2(2a_n-b_n)+3$

ここで，$c_n=2a_n-b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくと．

$c_{n+1}=2c_n+3$

∴ $c_{n+1}+3=2(c_n+3)$

∴ 数列 $\{c_n+3\}$ は初項 $2a_1-b_1+3=4$，公比2の等比数列となる

∴ $c_n+3=4\cdot 2^{n-1}$ すなわち．$\underline{2a_n-b_n=2^{n+1}-3}$ //

(3) (1)，(2)より．

$$\begin{cases} a_n+b_n=2\cdot 5^{n-1} & \cdots ③ \\ 2a_n-b_n=2^{n+1}-3 & \cdots ④ \end{cases}$$

③，④より．$\underline{a_n=\frac{1}{3}(2\cdot 5^{n-1}+2^{n+1})-1,\ b_n=\frac{1}{3}(4\cdot 5^{n-1}-2^{n+1})+1}$ //