岡山大学

2014年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1 \geqq 0$ が成り立つとする. このとき, 実数 a, b が満たすべき条件を求め, その条件を満たす点 (a, b) のなす領域を座標平面上に図示せよ.

(2) (1)の領域を点 (a, b) が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ.

(1) xの不等式とみると. $x^2+2(ay+b)x+y^2+1 \geqq 0$

これがすべてのxで成り立つので, $\frac{D_x}{4}=(ay+b)^2-(y^2+1) \leqq 0$

$\therefore (a^2-1)y^2+2aby+b^2-1 \leqq 0$

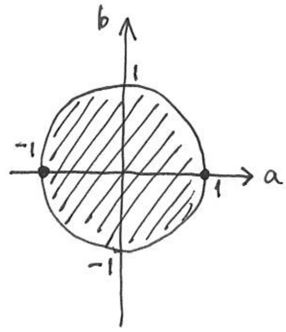
(i) $a=\pm1$のとき. $\pm2by+b^2-1 \leqq 0$ これがすべてのyで成り立つには.

$b=0$ またこのとき. すべてのx, yで成り立っている $\therefore (a, b)=(\pm1, 0)$

(ii) $a \neq \pm1$のとき. グラフの形より. $a^2<1$ $\therefore -1<a<1$

また, $\frac{D_y}{4}=(ab)^2-(a^2-1)(b^2-1) \leqq 0$

$\therefore -1<a<1$ かつ $a^2+b^2 \leqq 1$

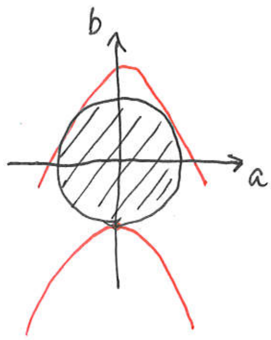


(i)(ii)より

$a^2+b^2 \leqq 1$ で右の斜線部分(境界線も含む)

(2) $a^2+b=k$ とおくと, $b=-a^2+k$

最小値は -1 ($a=0, b=-1$ のとき)



$a^2=k-b$ より. $k-b+b^2-1=0$

$\therefore b^2-b+k-1=0$

重解をもつから $1-4(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{5}{4}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 最大値は $\frac{5}{4}$ ($a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\frac{1}{2}$)