信州大学

2011年 工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) 4人でじゃんけんを2回するとき，2回ともあいこになる確率を求めよ.

(2) 次の関係式

$$a_1 = -1,\ a_{n+1} = 2a_n(1-a_n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ は，$1-2a_{n+1} = (1-2a_n)^2$ を満たすことを示し，一般項 a_n を求めよ.

(3) $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ および $|\vec{a}+2\vec{b}| = 2|\vec{a}-\vec{b}|$ が成り立つとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(1) まず1回のじゃんけんであいこになる確率を求める.

手の出し方は全部で $3^4 = 81$ 通り

4人とも同じ手であいこになるのは，3通り.

3種類の手がすべて出てあいこになるのは，$3 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 36$ 通り

1種類の手は2人が出すので，そのえらび方

$\therefore \dfrac{3+36}{81} = \dfrac{13}{27}$

$\therefore$ 2回ともあいこになるのは，$\left(\dfrac{13}{27}\right)^2 = \underline{\dfrac{169}{729}}$ //

(2) $1-2a_{n+1} = (1-2a_n)^2 \cdots (*)$ を示す.

$$(\text{右辺})-(\text{左辺}) = 1-4a_n+4a_n^2-(1-2a_{n+1})$$
$$= -4a_n+4a_n^2+2\cdot\{2a_n(1-a_n)\}$$
$$= 0$$

$\therefore$ (*) が成り立つことが示された ▨

したがって，$n \geqq 2$ のとき，$1-2a_n = (1-2a_{n-1})^2 = (1-2a_{n-2})^4 = \cdots = (1-2a_1)^{2^{n-1}}$

$\therefore 1-2a_n = 3^{2^{n-1}}$ $\quad \therefore \underline{a_n = \dfrac{1}{2}\left(1-3^{2^{n-1}}\right)}$ // これは $n=1$ のときも成り立っている.

(3) $|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}-\vec{b}|^2$ より，

$$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

$\therefore 12\vec{a}\cdot\vec{b} = 3|\vec{a}|^2$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{4}\cdot|\vec{a}|^2$

$\therefore |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta = \dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ より，

$\cos\theta = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore \underline{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ //