2014年 第2問

$\boxed{2}$ 次の3つの条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（i）$a_1 = 0$

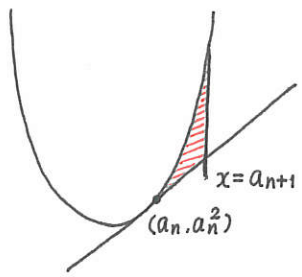
（ii）$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$

（iii）放物線 $y = x^2$ と，その上の点 $(a_n,\ a_n{}^2)$ における接線と，直線 $x = a_{n+1}$ とで囲まれる図形の面積が 8^n になる．

$y' = 2x$ であるから，点 $(a_n,\ a_n^2)$ における接線は，

$$y = 2a_n(x - a_n) + a_n^2$$

すなわち，$y = 2a_n x - a_n^2$



(i), (ii) より，接線の傾きは常に0以上であるから

右図のようになる．よって，

$$8^n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^2 - (2a_n x - a_n^2)\, dx$$

$$= \int_{a_n}^{a_{n+1}} (x - a_n)^2\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - a_n)^3\right]_{a_n}^{a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)^3$$

(ii) より，$a_{n+1} - a_n > 0$ であるから，$a_{n+1} - a_n = \sqrt[3]{3} \cdot 2^n$

$\therefore$ $n \geqq 2$ のとき，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[3]{3} \cdot 2^k$

$$= \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2(1 - 2^{n-1})}{1 - 2}$$

$$= \underline{\sqrt[3]{3}(2^n - 2)}_{\,//}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．