信州大学

2014年第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ は，$f''(x)<0$ をみたすとする．$t \geqq 0$ のとき，次の (1)，(2) の不等式が成り立つことを示せ．

(1) $f(0)+f'(t)t \leqq f(t) \leqq f(0)+f'(0)t$

(2) $\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2} \leqq \displaystyle\int_0^t f(u)\,du \leqq f(0)t+\dfrac{f'(0)}{2}t^2$

(1) ● $f(0)+f'(t)t \leqq f(t)$ を示す．

$g(t)=f(t)-f(0)-f'(t)t$ とおく

$g'(t)=f'(t)-f''(t)t-f'(t)$

$\quad =-f''(t)t$

よって，$f''(t)<0$ であるから，$t \geqq 0$ のとき，$g'(t) \geqq 0$

$\therefore$ $g(t)$ は単調増加であり，$g(t) \geqq g(0)=0$

したがって，$t \geqq 0$ のとき，$f(0)+f'(t)t \leqq f(t)$ が成り立つ

● $f(t) \leqq f(0)+f'(0)t$ を示す．

$h(t)=f(0)+f'(0)t-f(t)$ とおくと，

$h'(t)=f'(0)-f'(t)$

$h''(t)=-f''(t)>0$ （$\because$ $f''(t)<0$ であるから）

$\therefore$ $h'(t)$ は単調増加であり，$h'(t) \geqq h'(0)=0$ （$t \geqq 0$ において）

$\therefore$ $h(t)$ は単調増加であり，$h(t) \geqq h(0)=0$ （$t \geqq 0$ において）

したがって，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \leqq f(0)+f'(0)t$ が成り立つ

以上より，$t \geqq 0$ のとき，与えられた不等式は成り立つ ▨

(2) (1)の不等式を $[0,t]$ の区間で積分すると，

$$\underbrace{\int_0^t f(0)+f'(u)u\,du}_{①} \leqq \int_0^t f(u)\,du \leqq \underbrace{\int_0^t f(0)+f'(0)u\,du}_{②}$$

$① = \Big[f(0)u+f(u)u\Big]_0^t-\displaystyle\int_0^t f(u)\,du = f(0)t+f(t)t-\int_0^t f(u)\,du$

$\therefore$ $① \leqq \displaystyle\int_0^t f(u)\,du$ より，$\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2} \leqq \displaystyle\int_0^t f(u)\,du$

$② = \Big[f(0)u+\dfrac{f'(0)}{2}u^2\Big]_0^t = f(0)t+\dfrac{f'(0)}{2}t^2$

したがって与えられた不等式は成り立つ ▨