信州大学

2016年 経済学部 第4問

$\boxed{4}$ nを2以上の自然数とする．n人でじゃんけんをする．各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\frac{1}{3}$の確率で出すものとする．勝者が1人に決まるまでじゃんけんを繰り返す．ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1回目のじゃんけんで，勝者がただ1人に決まる確率を求めよ．

(2) 1回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ．

(3) $n=5$のとき，ちょうど2回のじゃんけんで，勝者がただ1人に決まる確率を求めよ．

(1) 勝者の選び方がn通り，勝者の手の出し方が3通り（それにより敗者の手は自動的に決まる）

また，n人のすべての手の出し方は3^n通りあるから

$$\frac{3n}{3^n}=\underline{\frac{n}{3^{n-1}}}\ //$$

(2) 勝者がk人に決まる確率は $\frac{{}_nC_k\cdot 3}{3^n}=\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$ （ただし，$1\leqq k<n$）

よって，あいこになるのは，

$$1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}=1-\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k$$

$$=1-\frac{1}{3^{n-1}}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\right)-2\right\}$$

$$=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\quad(\text{二項定理より})$$

$$=\underline{\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}}\ //$$

(3) $n=5$のとき，(2)よりあいこになるのは，$\frac{3^4-2^5+2}{3^4}=\frac{51}{81}=\frac{17}{27}$

(i) 5人→5人→1人

$$\frac{17}{27}\times\frac{5}{81}=\frac{85}{3^7}$$

(ii) 5人→4人→1人

$$\frac{{}_5C_4}{3^4}\times\frac{4}{3^3}=\frac{20}{3^7}$$

(iii) 5人→3人→1人

$$\frac{{}_5C_3}{3^4}\times\frac{3}{3^2}=\frac{30}{3^6}$$

(iv) 5人→2人→1人

$$\frac{{}_5C_2}{3^4}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{3^5}$$

(i)〜(iv)より

$$\frac{85}{3^7}+\frac{20}{3^7}+\frac{30}{3^6}+\frac{20}{3^5}=\frac{85+20+90+180}{3^7}$$

$$=\underline{\frac{125}{729}}\ //$$