信州大学

2015年 工学部 第1問

1 次の問いに答えよ．

(1) 座標空間において，3点 A(2, −1, 3), B(1, 1, 2), C(4, 1, −1) を通る平面が x 軸と交わる点の座標を求めよ．

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $1-\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ を解け．

(3) 方程式 $3(4^x + 4^{-x}) - 13(2^x + 2^{-x}) + 16 = 0$ を解け．

(1) 平面上の任意の点をPとおくと，

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$ $(s+t+u=1)$ と表せる

$\therefore \overrightarrow{OP} = s(2,-1,3) + t(1,1,2) + (1-s-t)\cdot(4,1,-1)$

$= (2s+t+4-4s-4t,\ -s+t+1-s-t,\ 3s+2t-1+s+t)$

$= (-2s-3t+4,\ -2s+1,\ 4s+3t-1)$

Pがx軸上にあるとき，$-2s+1=0$ かつ $4s+3t-1=0$

よって，$s=\frac{1}{2}$，$t=-\frac{1}{3}$ $\therefore$ 交点は，$\underline{(4,0,0)}$ //

(2) $\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x\cos x$

$\therefore \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$

$\therefore 2\sin x \cdot \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$-\frac{\pi}{3} \leqq x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ $\therefore \underline{x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi}$ //

(3) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと，相加・相乗の関係より，$t \geqq 2$（等号成立は $x=0$ のとき）

$t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$

$\therefore$ 方程式は，$3(t^2-2) - 13t + 16 = 0$

$\therefore 3t^2 - 13t + 10 = 0$

$(3t-10)(t-1) = 0$

$t \geqq 2$ より，$t = \frac{10}{3}$

$\therefore 2^x + 2^{-x} = \frac{10}{3}$

$\therefore (2^x)^2 - \frac{10}{3}\cdot 2^x + 1 = 0$

$\therefore 3\cdot(2^x)^2 - 10\cdot 2^x + 3 = 0$

$(3\cdot 2^x - 1)(2^x - 3) = 0$

$\therefore 2^x = \frac{1}{3}, 3$

$\therefore \underline{x = \pm\log_2 3}$ //