0001992277008999

東京女子大学

2014年 現代教養 第2問

数理
石井K

$\boxed{2}$ 実数 t に対して $f(t)=\dfrac{t+|t|}{2}$ とおく．このとき座標平面において不等式

$$\frac{1}{4}x^2-1 \leqq y \leqq f(2-x^2)$$

が表す領域を図示し，その面積を求めよ．

- $t \geqq 0$ のとき，$f(t)=\dfrac{t+t}{2}=t$
- $t<0$ のとき，$f(t)=\dfrac{t-t}{2}=0$

(i) $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ のとき　$2-x^2 \geqq 0$ より

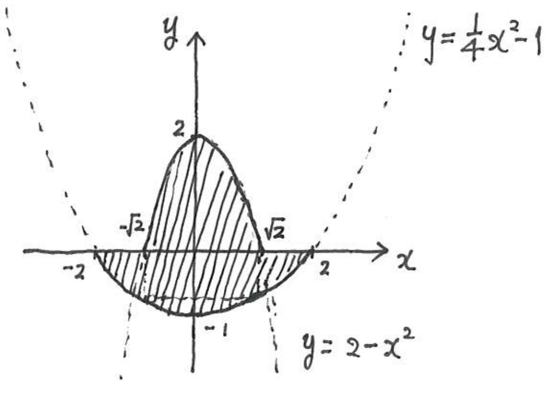
$f(2-x^2)=2-x^2$

∴ 与式は $\frac{1}{4}x^2-1 \leqq y \leqq 2-x^2$ となる

(ii) $x>\sqrt{2}$ または $x<-\sqrt{2}$ のとき　$2-x^2<0$ より

与式は $\frac{1}{4}x^2-1 \leqq y \leqq 0$ となる

(i), (ii)より 与式が表す領域は下のようになる



このとき，斜線部分の面積を S とおくと，

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}} 2-x^2\,dx+2\int_0^2 1-\frac{1}{4}x^2\,dx$$

$$=2\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}+2\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2$$

$$=\underline{\frac{8}{3}(1+\sqrt{2})}\ /\!/$$

対称性より

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2-x^2\,dx=2\int_0^{\sqrt{2}} 2-x^2\,dx$$

となる

これを利用すると少し計算が速い!