2011 年 工学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 実数 θ に対して，行列 A を $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．また，n を自然数とし，A の n 乗を A^n で表す．次に答えよ．

(1) 数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して

$$A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ．

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ とする．ある自然数 n に対しては，行列 A^n によって曲線 $y=-\dfrac{1}{2x}$ 上の点が常に曲線 $x^2-y^2=-1$ 上の点に移される．このような自然数 n の最小値を求めよ．