静岡大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a を定数とする．2次関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = 6(a+1)x^2 - 12x\int_0^1 f(t)\,dt + 5a - 2$$

を満たすとする．このとき，2次関数 $f(x)$ と3次関数 $g(x) = -4x^3 + f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\int_0^1 f(t)\,dt$ を a を用いて表せ．

(2) 3次関数 $g(x)$ の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．

(3) 3次方程式 $g(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) $f(x) = 6(a+1)x^2 - 12x\cdot c + 5a - 2$ とおくと．$\left(c = \int_0^1 f(t)\,dt \text{ とおいた}\right)$

$$f(x) = 6(a+1)x^2 - 12x\left[2(a+1)x^3 - 6cx^2 + (5a-2)x\right]_0^1 + 5a - 2$$
$$= 6(a+1)x^2 - 12x\left\{2(a+1) - 6c + 5a - 2\right\} + 5a - 2$$

$\therefore\ c = 7a - 6c \quad \therefore\ c = a \quad \therefore\ \underline{\int_0^1 f(t)\,dt = a}$ //

(2) $g(x) = -4x^3 + 6(a+1)x^2 - 12ax + 5a - 2$

$\therefore\ g'(x) = -12x^2 + 12(a+1)x - 12a$

$= -12(x-1)(x-a)$

(i) $a > 1$ のとき．

極大値 $2a^3 - 6a^2 + 5a - 2$ ($x = a$ のとき)

極小値 $-a$ ($x = 1$ のとき)

(ii) $a < 1$ のとき．

極大値 $-a$ ($x = 1$ のとき)

極小値 $2a^3 - 6a^2 + 5a - 2$ ($x = a$ のとき)

(iii) $a = 1$ のとき．　極値はなし

(i) $a > 1$ のとき

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	$2a^3-6a^2+5a-2$	$\searrow$

(ii) $a < 1$ のとき

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$2a^3-6a^2+5a-2$	$\nearrow$	$-a$	$\searrow$

(iii) $a = 1$ のとき

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$-a$	$\searrow$

(3) $g(1)g(a) < 0$ かつ $a \neq 1$ であればよいから．

$$-a(a-2)\Big\{\underbrace{2\left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}}_{>0}\Big\} < 0 \quad \therefore\ a(a-2) > 0 \quad \therefore\ \underline{a < 0,\ a > 2}$$ //