静岡大学

2016年 理（物・化）・工・情報 第1問

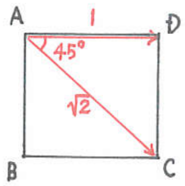
$\boxed{1}$ 一辺の長さが1の正方形ABCDが平面上にある．ただし，頂点A，B，C，Dは，この順に反時計回りに並んでいるものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ とベクトルの大きさ $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right|$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 点Pを平面上の点とするとき，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$ を証明せよ．

(3) 点Pが平面上を動くとき，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PA}$ の最小値を求めよ．また，その最小値を与える点Pについて，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ．

(1) 右図より，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=\underline{1}$ //



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AD}\\&=2\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right|=2\left|\overrightarrow{DA}\right|=\underline{2}$ //

(2) $$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}\\&=(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PD})+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$ は成り立つ ▨

(3) (2)より，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PA}\\&=|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}+|\overrightarrow{PD}|^2\\&=|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}|^2\\&=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}|^2\\&=\left|2\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}-\overrightarrow{AP}\right)\right|^2\end{aligned}$$

$\therefore$ <u>最小値は0，そのとき $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$</u> //