

2018年医学部第3問

3  $a$ は実数で  $a > 1$  とし、曲線  $y = \log x$  上に2点  $A(a, \log a)$ ,  $B\left(\frac{1}{a}, \log \frac{1}{a}\right)$  をとる。直線  $AB$  と曲線  $y = \log x$  で囲まれた部分の面積を  $S$  とし、直線  $AB$ ,  $x$  軸, 直線  $x = \frac{1}{a}$  および直線  $x = a$  で囲まれた部分の面積を  $T$  とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1)  $S, T$  を  $a$  を用いて表せ。  
 (2) 次の極限值を求めよ。ただし、(iii)において必要であれば

$$x > 0 \text{ のとき, } \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい。

$$(i) \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{T} \quad (ii) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{T}{(a-1)^2}$$

$$(iii) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{(a-1)^2} \quad (iv) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{T}$$

- (3)  $a > 1$  の範囲で、 $\frac{S}{T}$  は単調に増加することを示せ。  
 (4)  $S = T$  となる  $a$  が  $e^{\frac{3}{2}} < a < e^2$  の範囲に唯一つあることを示せ。ただし、 $e$  は自然対数の底で  $e = 2.7182\dots$  である。