

2012年医学部第2問

2  $C_1$  を中心  $(0, 0)$ , 半径  $1$  の円とし,  $C_2$  を中心  $(0, 0)$ , 半径  $r > 1$  の円とする.  $ad - bc > 0$  を満たす行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換により円  $C_1$  が円  $C_2$  に移るとする. 次の問いに答えよ.

(1)  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = r^2$ ,  $ab + cd = 0$  が成り立つことを示せ.

(2)  $a = r \cos \theta$ ,  $c = r \sin \theta$  ( $\theta$  は実数) とおくととき,  $b, d$  を  $r, \theta$  を用いて表せ.

(3)  $B = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とする. また,  $C_1$  に外接し,  $C_2$  に内接する 8 個の相異なる円  $S_1, S_2, \dots, S_8$  が次の 3 条件 (i), (ii), (iii) を満たしているとする. このとき,  $r$  を求めよ.

(i) 行列  $B$  で表される 1 次変換により  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) は  $S_{i+1}$  に,  $S_8$  は  $S_1$  に移る.

(ii)  $S_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) は  $S_i$  に外接し,  $S_8$  は  $S_1$  にも外接する.

(iii)  $S_1$  は  $S_3, S_4, \dots, S_7$  と交わらない.