福岡大学

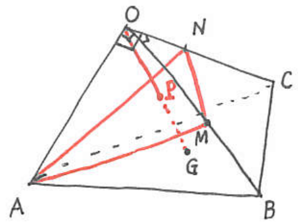
2015年 理系 第5問

数理 石井K

5 3辺OA，OB，OCが互いに直交する四面体OABCにおいて，△ABCの重心をG，辺OBを3：2に内分する点をM，辺OCを1：4に内分する点をNとする．また，△AMNと直線OGとの交点をPとする．このとき，OPとOGの比を求めると，OP：OG＝ $\boxed{}$ である．さらに，AP ⊥ MNのときOB：OC＝ $\boxed{}$ である．

9：23　　1：√3

$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$



3点O，P，Gは一直線上にあるので

$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG}$

$= \frac{k}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ と表される．

ここで，$\overrightarrow{OB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{ON}$ を代入して

$\overrightarrow{OP} = \frac{k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{9}k\overrightarrow{OM} + \frac{5}{3}k\overrightarrow{ON}$

Pが平面AMN上にあることより，$\frac{k}{3} + \frac{5}{9}k + \frac{5}{3}k = 1$　　$\therefore \frac{23}{9}k = 1$　　$\therefore k = \frac{9}{23}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{9}{23}\overrightarrow{OG}$ より　$\underline{OP : OG = 9 : 23}$ //

このとき，$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

$= -\frac{20}{23}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{23}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{23}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

$= -\frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$

AP⊥MNより　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$　$\therefore (23\overrightarrow{AP})\cdot(5\overrightarrow{MN}) = 0$ であるから

$(-20\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC})\cdot(-3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -9|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 = 0$　（$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$ である）

$\therefore |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{OB}|$

$\therefore \underline{OB : OC = 1 : \sqrt{3}}$ //