2013年 薬学部 第2問

増田

$\boxed{2}$ 一般項が，$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がある．

このとき，$\{a_n\}$ は自然数からなる数列であることが次のようにして示される．

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$\alpha+\beta = \boxed{\text{ア}}$ 1，$\alpha\beta = \boxed{\text{イウ}}$ -1 となる．

ここで

$a_1 = \boxed{\text{エ}}$ 1，$a_2 = \boxed{\text{オ}}$ 1 ……①

a_n を α，β を用いて表すと，$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ である．

このとき

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\alpha^{n+\boxed{\text{カ}}} - \beta^{n+\boxed{\text{キ}}}\right)(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)\right\} \end{aligned}$$

カ 1　キ 1

となり

$a_{n+2} = \boxed{\text{ク}}\,a_{n+1} + \boxed{\text{ケ}}\,a_n$ ……②

ク 1　ケ 1

が成り立つ．よって①，②より，$a_3 = \boxed{\text{コ}}$ 2，$a_4 = \boxed{\text{サ}}$ 3，… となり，$\{a_n\}$ は自然数からなる数列であることが示された．

$\alpha+\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$

$\alpha\beta = \dfrac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{2\times 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$

$a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1$

$a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

$a_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\underbrace{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}_{\sqrt{5}\times a_{n+1}}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{1} - \underbrace{\alpha\beta}_{(-1)}\underbrace{(\alpha^n - \beta^n)}_{\sqrt{5}\times a_n}\right\}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}a_{n+1} + \sqrt{5}a_n) = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1$

$= 1+1$

$= 2$

$a_4 = a_3 + a_2$

$= 2+1$

$= 3$