0002197812087999

三重大学

2016年 教育・生物資源 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ a を正の実数とし，曲線 $y=x^3$ を C_1，曲線 $y=\frac{9}{8}ax^2$ を C_2 とする．また，C_1 と C_2 の共通接線で C_1 と 2点を共有するものを ℓ とする．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) C_1 と ℓ が囲む図形の面積 S を求めよ．

(3) C_2 と ℓ の接点の x 座標 p を求めよ．さらに $I=\int_0^p\left(\frac{9}{8}ax^2-x^3\right)dx$ とするとき，比 $S:I$ を最も簡単な整数比で表せ．

(1) C_1 において，$y'=3x^2$ なので接点を (t, t^3) とおくと，接線は

$y=3t^2(x-t)+t^3$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3 \cdots (*)$

これが C_1 と2点を共有するので $t \neq 0$

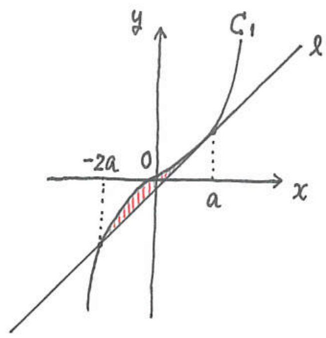
また C_2 と接するので，$\frac{9}{8}ax^2-3t^2x+2t^3=0$ は重解をもつ

判別式を D とすると，

$D=9t^4-4\cdot\frac{9}{8}a\cdot 2t^3=0 \quad \therefore\ 9t^3(t-a)=0$

$t\neq 0$ より $t=a$

$(*)$ より，$\underline{\ell: y=3a^2x-2a^3}$ //



(2) $x^3-(3a^2x-2a^3)=0 \iff (x-a)^2(x+2a)=0$

$\therefore$ C_1 と ℓ の接点は (a, a^3) でもう1つの交点は $(-2a, -8a^3)$

$S=\int_{-2a}^{a} x^3-(3a^2x-2a^3)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x\right]_{-2a}^{a}$

$=\frac{a^4}{4}-\frac{3}{2}a^4+2a^4-\left(4a^4-6a^4-4a^4\right)$

$=\underline{\frac{27}{4}a^4}$ //

(3) $\frac{9}{8}ax^2-(3a^2x-2a^3)=\frac{9}{8}a\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2 \quad \therefore\ p=\frac{4}{3}a$

$I=\int_0^{\frac{4}{3}a}\left(\frac{9}{8}ax^2-x^3\right)dx$

$=\left[\frac{3}{8}ax^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{4}{3}a}$

$=\frac{8}{9}a^4-\frac{64}{81}a^4$

$\therefore\ I=\frac{8}{81}a^4$

$\therefore\ S:I=\frac{27}{4}a^4:\frac{8}{81}a^4=\underline{2187:32}$ //