



2016年教育文化(理系)第5問

5 AとBは、赤球2個と白球1個が入った袋をそれぞれ1つずつ持っている。次のような試行を考える。

AとBが、それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を1つ選び、色を見てからもとの袋に戻す。上の試行を n ($n \geq 2$)回繰り返したとき、 n 回の試行の中でAとBが取り出した球の色が一致することが少なくとも1回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 1回の試行で、AとBが取り出した球の色が一致する確率を求めよ。
 (2) P_2, P_3 を求めよ。
 (3) $n \geq 4$ のとき、

$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ。

$$(1) \frac{2C_1 \times 2C_1 + 1}{3^2} = \frac{5}{9}$$

一致をO, 一致しないのをXで表すと。

$$P_2 \dots OX, XO$$

$$(2) P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{40}{81}$$

$$P_3 \dots OXX, OXO, XOX, XXO$$

となる確率

$$P_3 = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}$$

$$= \frac{240}{729} + \frac{100}{729}$$

$$= \frac{340}{729}$$

(3) $n \geq 4$ のとき、 n 回の試行で一致が少なくとも1回起き、連続しないのは次の場合がある

(i) $n-1$ 回目までに、一致が少なくとも1回起き、連続はしない、かつ n 回目は一致しない

(ii) $n-2$ 〃

, かつ $n-1$ 回目は一致しない
 かつ n 回目は一致する

(iii) $n-1$ 回目まですべて一致せず、 n 回目に一致する

$$(i) \boxed{P(n-1)} \times \dots$$

$$(ii) \boxed{P(n-2)} \times O$$

$$(iii) X \dots \dots X O$$

(i) ~ (iii)より

$$P_n = P_{n-1} \times \frac{4}{9} + P_{n-2} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \quad (n \geq 4) \quad \square$$