



2016年農・教育文化(文系)第3問

3 関数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x+1| + 1$ に対し、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。点 $P(t, f(t))$ ($t > -1$) における曲線 C の接線に垂直で、点 P を通る直線を l とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を、 t を用いて表せ。
 (2) 直線 l が点 $(-1, f(-1))$ を通るとき、 t の中で最も小さいものを求めよ。
 (3) (2) で求めた t が定める直線 l と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $x > -1$ において、 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

$$\therefore f'(x) = -x + 2, \quad f'(t) = -t + 2$$

よって、 l の傾きは、 $\frac{1}{t-2}$ ($t \neq 2$ のとき)

$$\therefore t \neq 2 \text{ のとき、} l: y = \frac{1}{t-2}(x-t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

また、 $t = 2$ のときは、 $l: x = 2$

以上をまとめると、 l の方程式は

$$\begin{cases} y = \frac{x}{t-2} - \frac{t}{t-2} - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3 & (t > -1, t \neq 2 \text{ のとき}) \\ x = 2 & (t = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) $f(-1) = \frac{1}{2}$ であるから (1) で求めた式に代入して

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{t-2} - \frac{t}{t-2} - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3 \iff t^3 - 6t^2 + 5t + 12 = 0$$

$$\iff (t+1)(t-3)(t-4) = 0$$

$t > -1$ より、 $t = 3, 4$ \therefore 最小の t は $t = 3$..

(3) $t = 3$ のとき、 $l: y = x + \frac{3}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5 & (x \geq -1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1 & (x < -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 - (x + \frac{3}{2}) = 0 \iff x = -1, 3$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 - (x + \frac{3}{2}) = 0 \iff x = -5, -1$$

$\therefore C$ と l の交点は $(-5, -\frac{7}{2}), (-1, \frac{1}{2}), (3, \frac{9}{2})$

$$\therefore S = \int_{-5}^{-1} -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 - (x + \frac{3}{2}) dx + \int_{-1}^3 -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 - (x + \frac{3}{2}) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-5}^{-1} (x+1)(x+5) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (-1+5)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (3+1)^3 \xrightarrow{\leftarrow \frac{1}{6} \text{公式}} = \frac{32}{3} ..$$

