長崎大学

2013年 第2問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0\ (n \geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 の値を求めよ．また，一般項 a_n を推測し，その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ．

(2) $\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin\dfrac{7}{12}\pi$ を求め，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，$X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め，次の不等式を解け．

$$2(\log_2 \cos x)^2 + (4 - \log_2 3)\log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leqq 0$$

注意： $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す．

(1) $a_2 + 2a_2a_1 - 3a_1 = 0$ より．$4a_2 = \dfrac{9}{2}$　$\therefore\ \underline{a_2 = \dfrac{9}{8}}$ //

同様に計算すると，$\underline{a_3 = \dfrac{27}{26},\ a_4 = \dfrac{81}{80},\ a_5 = \dfrac{243}{242}}$ //

$a_n = \dfrac{3^n}{3^n - 1}$ と推測できるので，数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．$a_1 = \dfrac{3}{3-1}$ となり，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．このとき．$a_k = \dfrac{3^k}{3^k - 1}$

$\therefore$ 漸化式より．$a_{k+1} + 2a_{k+1}\cdot\dfrac{3^k}{3^k-1} - 3\cdot\dfrac{3^k}{3^k-1} = 0$

これを解くと．$a_{k+1} = \dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}-1}$　$\therefore\ n = k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii)より．すべての自然数 n について，$a_n = \dfrac{3^n}{3^n-1}$ が成り立つ ▨

(2) 加法定理より．

$$\sin\frac{7}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \underline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\ //$$

$\therefore\ \sin x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \iff x = \dfrac{5}{12}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{7}{12}\pi + 2n\pi$

(n：整数)

$-\dfrac{17}{12}\pi < 1 < \dfrac{5}{12}\pi < \dfrac{7}{12}\pi < 4 < \dfrac{29}{12}\pi$ より．

$\underline{x = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{7}{12}\pi}$ //

2013年 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0\ (n \geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 の値を求めよ．また，一般項 a_n を推測し，その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ．

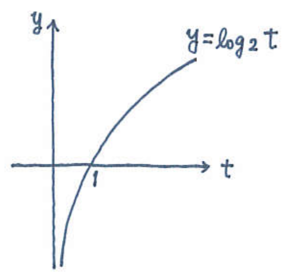
(2) $\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin\dfrac{7}{12}\pi$ を求め，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，$X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め，次の不等式を解け．

$$2(\log_2 \cos x)^2 + (4 - \log_2 3)\log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leqq 0$$

注意： $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す．



(3) $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ のとき．$0 < \cos x \leqq 1$

$y = \log_2 t$ のグラフは右のようになるから．

$\underline{X = \log_2 \cos x \leqq 0}$ //

不等式を X で表すと，

$2X^2 + (4 - \log_2 3)X + 2 - \log_2 3 \leqq 0$

$2 \quad 2-\log_2 3$
$1 \quad 1$

$\therefore (2X + 2 - \log_2 3)(X+1) \leqq 0$

$\dfrac{\log_2 3 - 2}{2} > \dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}} - 2}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{1}{4} > -1$ より．

$\therefore\ -1 \leqq X \leqq \dfrac{\log_2 3}{2} - 1$　これは，$X \leqq 0$ をみたす．

$\therefore\ -1 \leqq \log_2 \cos x \leqq \dfrac{\log_2 3}{2} - 1 \iff \dfrac{1}{2} \leqq \cos x \leqq \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$

$\iff \underline{\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}}$ //