0000427452759999

新潟大学

2011年第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 実数a, b, cに対して，3次関数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$が整数であるならば，すべての整数nに対して，$f(n)$は整数であることを示せ．

(2) $f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$が整数であるならば，すべての整数nに対して，$f(n)$は整数であることを示せ．

(1) $f(-1)=-1+a-b+c$ …①

$f(0)=c$ …②

$f(1)=1+a+b+c$ …③

①〜③より．

$$a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)\ ,\quad b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-1\ ,\quad c=f(0)$$

これらを元の式に代入して．

$$f(x)=x^3+\left\{\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)\right\}x^2+\left\{\frac{f(1)-f(-1)}{2}-1\right\}x+f(0)$$

$$=f(1)\cdot\frac{x(x+1)}{2}+f(-1)\cdot\frac{x(x-1)}{2}-f(0)\cdot(x^2-1)+x^3-x$$

$$\therefore f(n)=f(1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+f(-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2}-f(0)\cdot(n^2-1)+n^3-n$$

ここで，$n(n+1)$と$n(n-1)$は連続する整数の積なので．偶数である．

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ はともに整数　$\therefore f(n)$は整数 ▨

(2) $g(x)=f(x+2011)$という関数を考えると．

$g(x)$は3次関数であり．最高次の係数は1

これが成り立つから(1)が使える
忘れずに書こう！

また，$g(-1)=f(2010)$，$g(0)=f(2011)$，$g(1)=f(2012)$は整数であるから．

(1)より．すべての整数nに対して．$g(n)$は整数　すなわち$f(n+2011)$は整数

したがって，すべての整数nに対して．$f(n)$は整数 ▨

(2)は簡潔に示せるが
だからといって簡単ではない！