0002304545967999

島根大学

2016 年 総合理工（数理・情報システム以外） 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ について，極値を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい．

(2) $e^{\pi} > \pi^{e}$ を示せ．

(3) $e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$ を示せ．

(1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

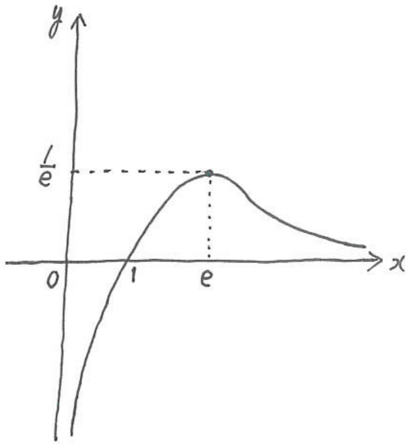
$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$x = e$ のとき

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	(0)

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\therefore$ 極大値 $\frac{1}{e}$ ($x = e$ のとき)

グラフは右のようになる



(2) $e < \pi$ より (1) のグラフにより $f(e) > f(\pi)$

よって，$\dfrac{\log e}{e} > \dfrac{\log \pi}{\pi} \iff \pi \log e > e \log \pi$

$\iff \log e^{\pi} > \log \pi^{e}$

$\iff e^{\pi} > \pi^{e}$ ▨

(3) $\sqrt{e} < \sqrt{\pi} < e$ より，$f(\sqrt{e}) < f(\sqrt{\pi})$

よって，$\dfrac{\log\sqrt{e}}{\sqrt{e}} < \dfrac{\log\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \iff \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\log e < \frac{1}{2}\sqrt{e}\log \pi$

$\iff \log e^{\sqrt{\pi}} < \log \pi^{\sqrt{e}}$

$\iff e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$ ▨