2013年 第2問

$\boxed{2}$ 自然数 a_1，a_2 が，

$$a_1 \leqq a_2, \quad a_1 + a_2 = a_1 a_2 \tag{1}$$

を満たすとき，a_1，a_2 を次のように求めることができる．

解法

(1) の 2 式の両辺を $a_1 a_2$ で割ると

$$\frac{1}{a_2} \leqq \frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$$

を得る．よって，この 2 つの式を組み合わせて

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a_1}$$

を得る．これより $a_1 \leqq 2$ である．$a_1 = 1$ のとき，これを (1) の右の式に代入すると $1 + a_2 = a_2$ となって矛盾する．$a_1 = 2$ のとき，これを (1) の右の式に代入すると $a_2 = 2$ となる．逆に $a_1 = a_2 = 2$ は (1) の 2 式を満たす．よって $a_1 = a_2 = 2$ となる．

必要があれば上の解法を参考にして，自然数 a_1，a_2，a_3 が

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$$

を満たすとき，a_1，a_2，a_3 を求めよ．