愛知県立大学

2014年 第1問　　1枚目／2枚．

数理 石井K

1 1から5までの5つの自然数のうち，いずれかの1つの数字が確率的に表示される3つの装置A，B，Cがある．各装置A，B，Cで数字n $(1 \leqq n \leqq 5)$が表示される確率をそれぞれ$P_A(n)$，$P_B(n)$，$P_C(n)$とし，

$$\sum_{n=1}^{5} P_A(n) = \sum_{n=1}^{5} P_B(n) = \sum_{n=1}^{5} P_C(n) = 1$$

が成り立っている．a，b，c，kを実数とし，$f(n) = 2^{-(n-3)^2}$とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $P_A(n) = a \cdot f(n)$であるとき，装置Aで各数字が表示される確率と，表示される数字の期待値を求めよ．

(2) $P_B(n) = 2^{-2n+5} \cdot b \cdot f(n)$であるとき，装置Bと(1)で確率を求めた装置Aの表示が，両方とも偶数である確率を求めよ．

(3) $P_C(n) = 2^{-n^2+kn} \cdot c \cdot f(n)$であり，(1)の$P_A(n)$が最大となるときの$n$を$m$とする．このとき，$P_C(n)$が最大となる$n$と$m$が等しくなる$k$の範囲を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} P_A(n) = \sum_{n=1}^{5} a \cdot f(n)$

$\displaystyle = a \sum_{n=1}^{5} 2^{-(n-3)^2}$

$\displaystyle = a\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)$

$\displaystyle = \frac{17}{8} a$

$\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} P_A(n) = 1$ より，　$a = \frac{8}{17}$

$\therefore$ $\underline{P_A(1) = P_A(5) = \frac{1}{34},\ P_A(2) = P_A(4) = \frac{4}{17},\ P_A(3) = \frac{8}{17}}$ //

また，期待値は．$\frac{1}{34} \cdot (1+5) + \frac{4}{17}(2+4) + \frac{8}{17} \cdot 3 = \underline{3}$ //

(2) (1)と同様にして，$\displaystyle\sum_{n=1}^{5} P_B(n) = b \cdot \sum_{n=1}^{5} 2^{-n^2+4n-4}$

$\displaystyle = b \sum_{n=1}^{5} 2^{-(n-2)^2}$

$\displaystyle = b\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{512}\right)$

$\displaystyle = \frac{1057}{512} b$

$\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} P_B(n) = 1$ より．　$b = \frac{512}{1057}$

2枚目につづく．

2014年第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

1　1から5までの5つの自然数のうち，いずれかの1つの数字が確率的に表示される3つの装置A，B，Cがある．各装置A，B，Cで数字n $(1 \leqq n \leqq 5)$が表示される確率をそれぞれ$P_A(n)$，$P_B(n)$，$P_C(n)$とし，

$$\sum_{n=1}^{5} P_A(n) = \sum_{n=1}^{5} P_B(n) = \sum_{n=1}^{5} P_C(n) = 1$$

が成り立っている．a，b，c，kを実数とし，$f(n) = 2^{-(n-3)^2}$とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $P_A(n) = a \cdot f(n)$であるとき，装置Aで各数字が表示される確率と，表示される数字の期待値を求めよ．

(2) $P_B(n) = 2^{-2n+5} \cdot b \cdot f(n)$であるとき，装置Bと(1)で確率を求めた装置Aの表示が，両方とも偶数である確率を求めよ．

(3) $P_C(n) = 2^{-n^2+kn} \cdot c \cdot f(n)$であり，(1)の$P_A(n)$が最大となるときの$n$を$m$とする．このとき，$P_C(n)$が最大となる$n$と$m$が等しくなる$k$の範囲を求めよ．

(2) のつづき．

Aが偶数の表示となる確率は $P_A(2) + P_A(4) = \dfrac{8}{17}$

Bが 〃 　$P_B(2) + P_B(4) = \dfrac{512}{1057}\left(1 + \dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{544}{1057}$

$\therefore \dfrac{8}{17} \times \dfrac{544}{1057} = \underline{\dfrac{256}{1057}}$ //

(3) (1)より $m = 3$ である．

一方，$P_C(n) = 2^{-n^2+kn} \cdot c \cdot f(n)$

$= c \cdot 2^{-2n^2+(k+6)n-9}$ 　ここで $\sum_{n=1}^{5} P_C(n) = 1$，$2^{-2n^2+(k+6)n-9} > 0$ より．$c > 0$

$\therefore g(n) = -2n^2 + (k+6)n - 9$ とおくと．

$P_C(n)$：最大 $\Leftrightarrow$ $g(n)$ が最大

$\therefore$ 軸は $x = \dfrac{k+6}{4}$ これが $\dfrac{5}{2} \leqq n \leqq \dfrac{7}{2}$ の範囲にあればよい

$\therefore \dfrac{5}{2} \leqq \dfrac{k+6}{4} \leqq \dfrac{7}{2}$ 　$\therefore 10 \leqq k + 6 \leqq 14$

$\therefore \underline{4 \leqq k \leqq 8}$ //