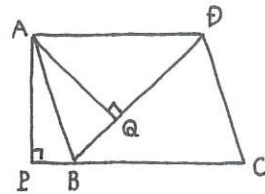




2016年 教育学部・農学部 第3問

3 平行四辺形 ABCD は、 $AB = 2$ 、 $AD = 3$ 、 $\cos \angle BAD = \frac{1}{3}$ を満たしているとする。直線 BC 上に $BC \perp AP$ となる点 P をとり、直線 BD 上に $BD \perp AQ$ となる点 Q をとる。 $\vec{AB} = \vec{a}$ 、 $\vec{AD} = \vec{b}$ とおくと、次の問に答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
 (2) \vec{AP} と \vec{AQ} を \vec{a} 、 \vec{b} で表せ。
 (3) $|\vec{AP}|$ と $|\vec{AQ}|$ を求めよ。
 (4) $|\vec{PQ}|$ を求めよ。



$$\begin{aligned} (1) \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle BAD \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \underline{2} \end{aligned}$$

$$(2) \vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} \text{ より、} \vec{AP} = \vec{a} + s \vec{b} \text{ (} s \text{ は実数) と表せる。}$$

$$\therefore BC \perp AP \text{ より、} \vec{b} \cdot \vec{AP} = \vec{a} \cdot \vec{b} + s |\vec{b}|^2 = 0 \quad \therefore 2 + 9s = 0 \quad \therefore s = -\frac{2}{9}$$

$$\therefore \vec{AP} = \vec{a} - \frac{2}{9} \vec{b}$$

$$BQ : QD = t : 1-t \text{ (} t \text{ は実数) とおくと、} \vec{AQ} = (1-t) \vec{a} + t \vec{b}$$

$$BD \perp AQ \text{ より、} (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \{(1-t) \vec{a} + t \vec{b}\} = (1-t) \vec{a} \cdot \vec{b} + t |\vec{b}|^2 - (1-t) |\vec{a}|^2 - t \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore 9t - 2 = 0 \quad \therefore t = \frac{2}{9} \quad \therefore \vec{AQ} = \frac{7}{9} \vec{a} + \frac{2}{9} \vec{b}$$

(3) (2) より、

$$|\vec{AP}|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{4}{9} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81} |\vec{b}|^2 = 4 - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{32}{9} \quad \therefore |\vec{AP}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$|\vec{AQ}|^2 = \frac{49}{81} |\vec{a}|^2 + \frac{28}{81} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81} |\vec{b}|^2 = \frac{196}{81} + \frac{56}{81} + \frac{36}{81} = \frac{288}{81} \quad \therefore |\vec{AQ}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$(4) (2) \text{ より、} \vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} = \frac{7}{9} \vec{a} + \frac{2}{9} \vec{b} - (\vec{a} - \frac{2}{9} \vec{b}) = -\frac{2}{9} \vec{a} + \frac{4}{9} \vec{b}$$

$$\therefore |\vec{PQ}|^2 = \frac{4}{81} |\vec{a}|^2 - \frac{16}{81} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{81} |\vec{b}|^2$$

$$= \frac{16}{81} - \frac{32}{81} + \frac{144}{81}$$

$$= \frac{128}{81}$$

$$\therefore |\vec{PQ}| = \frac{8\sqrt{2}}{9}$$