0001350819468999

三重大学

2013年 医学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4 e で自然対数の底を表す．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + e})$$

で定めるとき，以下の問いに答えよ．

※ 難しい問題ですが，
良問なので理解すれば実力がつきます．
本番では (1) は正解したいところです．

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．また $f'(x)$ が偶関数であることを示せ．

(2) 定積分

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

を求めよ．

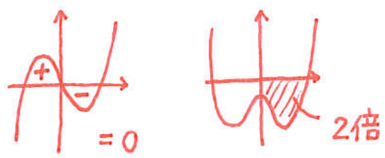
ポイント ・偶関数 × 奇関数 = 奇関数

・$\int_{-1}^{1}$ 奇関数 $dx = 0$，$\int_{-1}^{1}$ 偶関数 $dx = 2\int_{0}^{1}$ 偶関数 dx

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．n を 2 以上とするとき，a_n と a_{n-1} の間に成り立つ関係式を求めよ．



(1)
$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+e})'}{x+\sqrt{x^2+e}}$$
$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+e}}}{x+\sqrt{x^2+e}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2+e}}{x-\sqrt{x^2+e}}$$
$$= \frac{x-\sqrt{x^2+e}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+e}}-x}{x^2-(x^2+e)}$$
$$= -\frac{-\sqrt{x^2+e}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+e}}}{e}$$
$$= \frac{x^2+e-x^2}{e\sqrt{x^2+e}}$$
$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+e}}} \text{〃}$$

$$\therefore f'(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+e}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+e}}$$
$$= f'(x) \qquad \therefore f'(x) \text{は偶関数} \ \blacksquare$$

(2)
$$(与式) = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\left\{\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}' dx$$
$$= \left[\frac{2}{\pi}f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{2}{\pi}f'(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{奇関数}dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\{f(1)+f(-1)\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left\{\log(1+\sqrt{1+e})+\log(-1+\sqrt{1+e})\right\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\log\underbrace{(1+\sqrt{1+e})(-1+\sqrt{1+e})}_{=1+e-1 \,=\, e}$$
$$= \underline{\frac{2}{\pi}} \text{〃}$$

0001350819468999

三重大学

2013年 医学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ eで自然対数の底を表す．関数$f(x)$を

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+e})$$

で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数$f(x)$を微分せよ．また$f'(x)$が偶関数であることを示せ．

(2) 定積分

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

を求めよ．

(3) 数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．nを2以上とするとき，a_nとa_{n-1}の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) $a_n=\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x)\left\{\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}'dx$

$=\left[x^{2n}f(x)\cdot\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left\{2nx^{2n-1}f(x)+x^{2n}f'(x)\right\}\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$=\underbrace{\frac{2}{\pi}\{f(1)+f(-1)\}}_{(2)\text{より}.\ =\frac{2}{\pi}}-\frac{4n}{\pi}\int_{-1}^{1}x^{2n-1}f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\underbrace{x^{2n}f'(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{}dx$

(偶関数)×(偶関数)×(奇関数)
=(奇関数)　∴積分は0

$=\frac{2}{\pi}-\frac{4n}{\pi}\int_{-1}^{1}x^{2n-1}f(x)\left\{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}'dx$

$=\frac{2}{\pi}-\frac{4n}{\pi}\underbrace{\left[-\frac{2}{\pi}x^{2n-1}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{1}}_{=0}+\frac{4n}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_{-1}^{1}\left\{(2n-1)x^{2n-2}f(x)+x^{2n-1}f'(x)\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$=\frac{2}{\pi}-\frac{8n}{\pi^2}\cdot(2n-1)\underbrace{\int_{-1}^{1}x^{2n-2}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx}_{=a_{n-1}}-\frac{8n}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\underbrace{x^{2n-1}f'(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{}dx$

(奇)×(偶)×(偶)=(奇)　∴=0

$\therefore\ a_n=\frac{2}{\pi}-\frac{8n(2n-1)}{\pi^2}\cdot a_{n-1}$ //