



2011年第2問

2 3辺の長さが  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $CA = 5$  である直角三角形  $ABC$  と、その内側にあつて2辺  $AB$  および  $AC$  に接する円  $O$  を考える。この円の半径を  $r$  とし、中心  $O$  から  $AB$  に引いた垂線と  $AB$  との交点を  $H$  とする。また、ベクトル  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  と同じ向きで大きさが1のベクトルを、それぞれ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  とし、 $\vec{AH} = t\vec{u}$  ( $t > 0$ ) とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $AO$  と辺  $BC$  の交点を  $M$  とするとき、ベクトル  $\vec{AM}$  を  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  を用いて表せ。
- (2) ベクトル  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  の内積  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  を求め、ベクトル  $\vec{AO}$  と  $\vec{HO}$  を、それぞれ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  および  $t$  を用いて表せ。  
また、円  $O$  の半径  $r$  を  $t$  で表せ。
- (3) 円  $O$  が辺  $BC$  にも接するとき、その中心を  $I$  とする。すなわち、 $I$  は三角形  $ABC$  の内心である。そのときの  $t$  の値と、内接円  $I$  の半径を求めよ。
- (4) 円  $O$  と内接円  $I$  が共有点をもたないような  $t$  の範囲を求めよ。