昭和大学

2015年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) x の関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ $f(x)=-x^2+2x+2$，$g(x)=x^2+2x+a$ とする．ただし，a は定数とする．

(1-1) $g(x)<f(x)$ を満たす実数 x が区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ に存在するような，定数 a の値の範囲を求めよ．

(1-2) $g(x_1)<f(x_2)$ を満たす実数 x_1 および x_2 が区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ に存在するような，定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 白球4個と黒球 n 個が入った袋から同時に2個の球を取り出すとき，2個の球が同色である確率を p_n とする．ただし，球はすべて同じ確率で取り出されるものとする．

(2-1) $n=3$ のとき，p_n の値を求めよ．

(2-2) $n \geqq 2$ とする．このとき，$p_n \geqq \dfrac{1}{2}$ となる整数 n の最小値を求めよ．

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x \geqq \sqrt{2}$ を解け．

(4) $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．6^{100} の桁数を求めよ．

(1) (1-1) $f(x)-g(x)=-2x^2+2-a$

$\therefore$ $g(x)<f(x)$ より，$x^2<1-\dfrac{a}{2}$　これが実数解をもつためには $a<2$

逆に $a<2$ のとき $x=0$ は不等式をみたす．よって，$\underline{a<2}$ //

(1-2) $-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は $f(x)=-(x-1)^2+3$ より，3

$g(x)$ の最小値は，$g(x)=(x+1)^2-1+a$ より，$a-1$

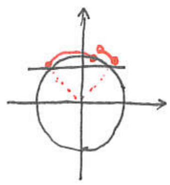
$\therefore$ $a-1<3$ より，$\underline{a<4}$ //

(2) (2-1) $P_3=\dfrac{{}_4C_2+{}_3C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{9}{21}=\underline{\dfrac{3}{7}}$ //

(2-2) $P_n=\dfrac{{}_4C_2+{}_nC_2}{{}_{n+4}C_2}=\dfrac{n^2-n+12}{(n+4)(n+3)}$

$\therefore$ $P_n \geqq \dfrac{1}{2}$ より，$n^2-9n+12 \geqq 0$　$n \geqq 2$ ではじめて成り立つのは，$\underline{n=8}$ //

(3) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) \geqq \sqrt{2}$　$\therefore$ $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$0 \leqq x < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x+\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$　$\therefore$ $\dfrac{\pi}{3} \leqq x+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{9}{4}\pi \leqq x+\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$

すなわち，$\underline{0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi \leqq x < 2\pi}$ //

(4) $10^{n-1} \leqq 6^{100} < 10^n$ とすると，$n-1 \leqq 100(\log_{10}2+\log_{10}3)<n$

$\therefore$ $n-1 \leqq 77.81 < n$　$\therefore$ $n=78$　$\underline{78桁}$ //