昭和大学

2016年 歯学部・薬学部・保健医療 第4問

数理
石井K

$\boxed{4}$ 3次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$ は，$x=-1$ と $x=2$ で極値をとり，曲線 $y=f(x)$ は点P(1, −5)を通るという.

(1) 定数 a, b, c を求めよ.

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点Pにおける接線が，この曲線とP以外の点Qで交わるとき，この接線の方程式と点Qの座標を求めよ.

(3) 線分PQと曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(1) $f'(x)=3x^2+6ax+3b$

$=3(x^2+2ax+b)$

$f'(-1)=0$ より，$1-2a+b=0$ $\therefore$ $2a-b=1$ …①

$f'(2)=0$ より，$4+4a+b=0$ $\therefore$ $4a+b=-4$ …②

①，②より，$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$

このとき，$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c$

点Pを通ることから，$f(1)=-5$ $\therefore$ $1-\frac{3}{2}-6+c=-5$ $\therefore$ $c=\frac{3}{2}$

以上より，$\underline{a=-\frac{1}{2},\ b=-2,\ c=\frac{3}{2}}$ //

(2) (1)より，$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{3}{2}$

$f'(x)=3(x^2-x-2)$

$\therefore$ Pにおける接線は，$y=-6(x-1)-5$ $\quad\therefore$ $\underline{y=-6x+1}$ //

$f(x)-(-6x+1)=0 \iff x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}=0$

$\iff 2x^3-3x^2+1=0$

$\iff (x-1)^2(2x+1)=0$

$\therefore$ $x\neq1$ より，$x=-\frac{1}{2}$ このとき $y=-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=4$ $\quad\therefore$ $\underline{Q\left(-\frac{1}{2},4\right)}$ //

(3) 右図より

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)=\underline{\frac{27}{64}}$$ //