

2016年現代教養第6問

6 初項が3である数列 $\{a_n\}$ と、その階差数列 $\{b_n\}$ が、すべての自然数 n に対して、条件 $a_n - b_n = -1$ をみたしている。このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
 (2) $a_n \leq 99999999$ となる最大の n を求めよ。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ は用いてよい。

$$(1) b_n = a_{n+1} - a_n \text{ ①}$$

$$a_n - b_n = -1 \iff -a_{n+1} + 2a_n = -1$$

$$\iff a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

$\therefore \{a_n + 1\}$ は初項4, 公比2の等比数列

$$\therefore a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} \quad \therefore \underline{a_n = 2^{n+1} - 1} \text{ ②}$$

$$(2) a_n \leq 99999999 \iff 2^{n+1} - 1 \leq 10^8 - 1$$

$$\iff 2^{n+1} \leq 10^8$$

$$\therefore (n+1) \log_{10} 2 \leq 8$$

$$n+1 \leq \frac{8}{0.3010}$$

$$\doteq 26.58$$

$$\therefore n \leq 25.58$$

$$\therefore \underline{n = 25} \text{ ③}$$