0001667632338999

首都大学東京

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ xy 平面上で x 座標と y 座標がともに自然数であるような点 $(m,\ n)$ の各々に，自然数 $a(m,\ n)$ が割り当てられている．$a(1,\ 1)=1$ であり，すべての $m,\ n$ に対して次の規則が成り立っているとする．

$$a(m+1,\ n)=a(m,\ n)+m+n$$
$$a(m,\ n+1)=a(m,\ n)+m+n-1$$

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $a(1,\ 3)$ および $a(2,\ 2)$ の値を求めなさい．

(2) 各々の自然数 n に対して $a_n=a(n,\ n)$ とおいて数列 $\{a_n\}$ を定めるとき，a_{n+1} を a_n と n の式で表しなさい．

(3) a_{100} の値を求めなさい．

(1) $a(1,2)=a(1,1)+1=2$ (下式に $m=n=1$ を代入した)

$a(1,3)=a(1,2)+2=\underline{4}$ // (下式に $m=1, n=2$ を代入した)

$a(2,2)=a(1,2)+3=\underline{5}$ // (上式に $m=1, n=2$ を代入した)

(2) $a(n+1,n+1)=a(n,n+1)+2n+1$

$=a(n,n)+2n-1+2n+1$

$=a(n,n)+4n$

$\therefore\ \underline{a_{n+1}=a_n+4n}$ //

(3) (2)より，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k \quad (n\geqq 2)$$

$$\therefore\ a_{100}=1+\sum_{k=1}^{99}4k$$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100$$

$$=\underline{19801}\ //$$