0002024185797999

首都大学東京

2015年 都市教養（文系） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面において曲線 $y=k(1-x^2)-1$（k は正の定数）を C_1 とし，曲線 $y=1-|x|$ を C_2 とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) C_1 は k の値によらない定点を通る．この定点の座標をすべて求めなさい．

(2) C_1 と C_2 が共有点をもつような正の定数 k の値の範囲を求めなさい．

(3) 正の定数 k が (2) で求めた範囲にあるとき，C_1 と C_2 の共有点の個数を求めなさい．

(1) $k(1-x^2)-1-y=0$

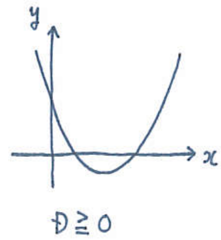
$\therefore \begin{cases} 1-x^2=0 \\ -1-y=0 \end{cases} \iff (x,y)=\underline{(1,-1),(-1,-1)}$ //

(2) C_1 と C_2 はともに y 軸に関して対称なので

C_1 と C_2 が共有点をもつ $\iff$ C_1 と C_2 が $x\geqq 0$ において共有点をもつ

$\therefore k(1-x^2)-1-(1-x)=0$ が $x\geqq 0$ に実数解をもつ

$kx^2-x-k+2=0$ の判別式を D とすると．



軸は $x=\dfrac{1}{2k}>0$ であるから $D\geqq 0$ となればよい．

$\therefore D=1-4k(-k+2)\geqq 0$

$\therefore 4k^2-8k+1\geqq 0$ $\quad\therefore \underline{0<k\leqq \dfrac{2-\sqrt{3}}{2},\ k\geqq \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$ //

(3) (i) $kx^2-x-k+2=0$ が正の解を2個もつ場合．

解と係数の関係より．$\alpha+\beta=\dfrac{1}{k}>0$，$\alpha\beta=\dfrac{-k+2}{k}>0$ $\quad\therefore k<2$

このとき．C_1 と C_2 の共有点は $2\times 2=4$ 個．（ただし，$k=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ のときは 2コ）

(ii) $kx^2-x-k+2=0$ が $x=0$ を解にもつ場合．

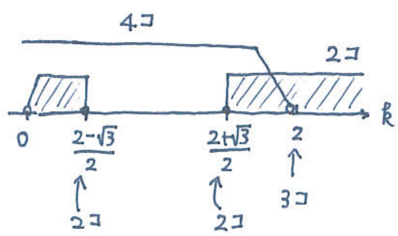
$k=2$ このとき．C_1 と C_2 の共有点は $x(2x-1)=0$ より $x=0,\pm\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore$ 3個．

$-\dfrac{1}{2}$ は $x<0$ のとき出てくる．

(iii) 正の解と負の解を1個ずつもつとき．

C_1 と C_2 の共有点は 2個．

(i)〜(iii) と (2) より．



$\begin{cases} 0<k<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}<k<2 \text{ のとき 4個.} \\ k=2 \text{ のとき. 3個.} \\ k=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2},\ k>2 \text{ のとき. 2個.} \end{cases}$ —— //