2016年 都市教養（文系） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする．

$$f(x) = x^2 - (2\cos\theta)x - \sin^2\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}$$

とおくとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めなさい．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつような θ の範囲を求めなさい．

(3) θ が(2)で求めた範囲を動くとき，放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(\theta)$ とする．$S(\theta)$ を最大にする θ の値と，$S(\theta)$ の最大値を求めなさい．

(1) $y = \{x - (\cos\theta)\}^2 \underbrace{- \cos^2\theta - \sin^2\theta}_{=-1} + \sin\theta + \frac{1}{2}$

$= \{x - (\cos\theta)\}^2 + \sin\theta - \frac{1}{2}$

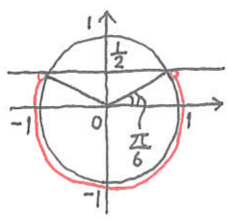
∴ 頂点は $\underline{\left(\cos\theta, \sin\theta - \frac{1}{2}\right)}$ //

(2) 判別式を D とすると，$D > 0$

$\frac{D}{4} = \cos^2\theta - \left(-\sin^2\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}\right)$

$= -\sin\theta + \frac{1}{2}$

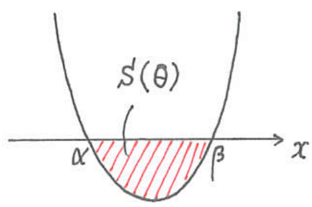
∴ $-\sin\theta + \frac{1}{2} > 0$ より，$\sin\theta < \frac{1}{2}$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\underline{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$ //

(3) $f(x) = 0$ の解を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと，

解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 2\cos\theta$，$\alpha\beta = -\sin^2\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}$



∴ $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= 4\cos^2\theta - 4\left(-\sin^2\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}\right)$

$= -4\sin\theta + 2$

$\beta - \alpha > 0$ より，$\beta - \alpha = \sqrt{-4\sin\theta + 2}$

$S(\theta) = \int_\alpha^\beta -f(x)\,dx$

$= -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$

$\frac{1}{6}$公式

$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

$= \frac{1}{6} \cdot (-4\sin\theta + 2)^{\frac{3}{2}}$

∴ $\underline{\theta = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき，最大値 } \sqrt{6} \text{ をとる}}$ //