

2018年理系第3問

3 空間において、点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C をとる。ただし、 4 点 O, A, B, C は同一平面上にはないとする。 3 点 O, A, C が定める平面 OAC と平面 OAB のなす角を α とし、平面 OAB と平面 OBC のなす角を β とし、さらに平面 OBC と平面 OAC のなす角を γ とする。また、 $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 平面 OAB 上に点 P を、直線 CP が平面 OAB と直交するようにとる。また、直線 OA 上に点 F を、直線 PF が直線 OA と直交するようにとる。直線 OA と直線 CF が直交することを示しなさい。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を $\sin b$, $\sin c$ および $\sin \alpha$ を用いて表しなさい。
- (3) 以下の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$