

2018年都市教養（理系）第3問

3 以下の問いに答えなさい。

(1) 正の整数 p, q, f および整数 r が次の関係をみたしているとする。

$$p = fq + r$$

ただし、 $0 \leq r < q$ とする。このとき整数 d が p と q の公約数であることと、 d が q と r の公約数であることは同値であることを示しなさい。

(2) 正の整数 k, m の最大公約数を $\gcd(k, m)$ で表す。 p, q を $p > q$ をみたす正の整数とする。また、 $n \geq 2$ とし、 $2n - 1$ 個の正の整数 $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$ が次の関係をみたしているとする。

$$p = r_1$$

$$q = r_2$$

$$r_1 = f_1 r_2 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

$$r_2 = f_2 r_3 + r_4, \quad r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = f_{n-2} r_{n-1} + r_n, \quad r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = f_{n-1} r_n$$

このとき、 $\gcd(p, q) = \gcd(r_j, r_{j+1})$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) が成り立つことを j に関する数学的帰納法で示しなさい。

(3) p と q を互いに素な正の整数とする。このとき、 $ap + bq = 1$ をみたす整数 a, b が存在することを示しなさい。