首都大学東京

2011年第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

2 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする．

$$\begin{cases} a_1 = 4,\ b_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_n - 3b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4 を求めなさい．

(2) $a_{n+4} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, $b_{n+4} - b_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はともに5の倍数であることを証明しなさい．

(3) a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ も b_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ も5の倍数ではないことを証明しなさい．

(1) $a_2 = 4a_1 - 3b_1 = 7$, $b_2 = 3a_1 + 4b_1 = 24$, $a_3 = 4a_2 - 3b_2 = -44$,

以下同様にして，$b_3 = 117$, $a_4 = -527$, $b_4 = 336$

$\therefore$ $\underline{a_2 = 7,\ b_2 = 24,\ a_3 = -44,\ b_3 = 117,\ a_4 = -527,\ b_4 = 336}$ //

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ において．

「$a_{n+4} - a_n$, $b_{n+4} - b_n$ はともに5の倍数である」

を数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき．

(1)より．$a_5 - a_1 = 4a_4 - 3b_4 - a_1 = -3120$

$b_5 - b_1 = 3a_4 + 4b_4 - b_1 = -240$

$\therefore$ ともに5の倍数となる．

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定する．

$a_{k+4} - a_k = 5l$, $b_{k+4} - b_k = 5m$ （l, m は整数）とおく．

$a_{k+5} - a_{k+1} = 4a_{k+4} - 3b_{k+4} - (4a_k - 3b_k) = 4(a_{k+4} - a_k) - 3(b_{k+4} - b_k) = 5(4l - 3m)$

$b_{k+5} - b_{k+1} = 3a_{k+4} + 4b_{k+4} - (3a_k + 4b_k) = 3(a_{k+4} - a_k) + 4(b_{k+4} - b_k) = 5(3l + 4m)$

$\therefore$ ともに5の倍数となり．$n = k+1$ のとき成り立つ

(i), (ii)より．すべての自然数 n において $a_{n+4} - a_n$ と $b_{n+4} - b_n$ はともに5の倍数

であることが示された ▨

2011年第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

2　2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする．

$$\begin{cases} a_1 = 4,\ b_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_n - 3b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4 を求めなさい．

(2) $a_{n+4} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, $b_{n+4} - b_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はともに5の倍数であることを証明しなさい．

(3) a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ も b_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ も5の倍数ではないことを証明しなさい．

(3) (1)より．$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ はすべて5の倍数ではない．

(2)より．$a_5 - a_1$ と $b_5 - b_1$ は ともに5の倍数

$\therefore$ $a_5 = (5の倍数) + a_1$ ，$b_5 = (5の倍数) + b_1$

となり．a_5, b_5 はともに5の倍数ではない．

以下同様にして(帰納的に)

$a_6, b_6, a_7, b_7, \cdots$ はすべて5の倍数ではない

$\therefore$ 題意は示された ▨