0002067812397999

弘前大学

2015年 理系 第2問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $r>0$ を定数とする．点 $(x,\ y)$ が楕円 $4x^2+y^2=r^2$ 上を動くとき，$6x+4y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x,\ y$ がすべての実数値をとるとき，$\dfrac{6x+4y+5}{4x^2+y^2+15}$ の最大値と最小値を求めよ．

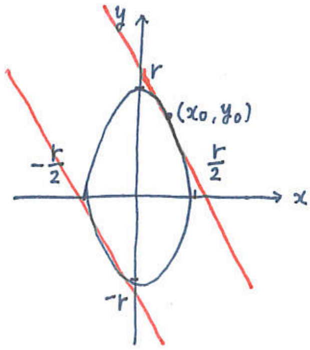
(1) $6x+4y=k$ とおく（これは傾きが $-\frac{3}{2}$ の直線）

楕円上の点 (x_0, y_0) における接線は

$$4x_0x+y_0y=r^2$$

この接線の傾きが $-\frac{3}{2}$ となるのは，$-\dfrac{4x_0}{y_0}=-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\ y_0=\frac{8}{3}x_0 \cdots ①$$



また，(x_0, y_0) は楕円上の点より，

$$4x_0^2+y_0^2=r^2 \cdots ②$$

①，②より，$(x_0, y_0)=\left(\frac{3}{10}r,\ \frac{4}{5}r\right),\ \left(-\frac{3}{10}r,\ -\frac{4}{5}r\right)$

$\therefore$ $6x+4y$ の最大値は $6\cdot\frac{3}{10}r+4\cdot\frac{4}{5}r=5r$，最小値は $-5r$

$$\therefore\ \underline{-5r \leqq 6x+4y \leqq 5r}$$

(2) (1)より，$\dfrac{5(1-r)}{r^2+15} \leqq \dfrac{6x+4y+5}{4x^2+y^2+15} \leqq \dfrac{5(1+r)}{r^2+15}$

$f(r)=\dfrac{5(1-r)}{r^2+15}$，$g(r)=\dfrac{5(1+r)}{r^2+15}$ とおくと

$f'(r)=\dfrac{-5(r^2+15)-5(1-r)\cdot 2r}{(r^2+15)^2}=\dfrac{5(r-5)(r+3)}{(r^2+15)^2}$　$\therefore$ $r>0$ より $f'(r)=0$ となるのは $r=5$

$g'(r)=\dfrac{5(r^2+15)-5(1+r)\cdot 2r}{(r^2+15)^2}=\dfrac{-5(r+5)(r-3)}{(r^2+15)^2}$　$\therefore$ $r>0$ より，$g'(x)=0$ となるのは，$r=3$

以上より，$f(r)$，と $g(r)$ の増減表は次のようになる．

2枚目につづく

2015年 理系 第2問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $r>0$ を定数とする．点 $(x,\ y)$ が楕円 $4x^2+y^2=r^2$ 上を動くとき，$6x+4y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x,\ y$ がすべての実数値をとるとき，$\dfrac{6x+4y+5}{4x^2+y^2+15}$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) のつづき．

r	(0)	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(r)$		$-$	0	$+$
$f(r)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

r	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(r)$		$+$	0	$-$
$g(r)$		$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$

よって，$r>0$ において，

$f(r)\geqq -\frac{1}{2}$，$g(r)\leqq\frac{5}{6}$ であるから．

等号成立は $x=\frac{3}{10}r,\ y=\frac{4}{5}r$

$$-\frac{1}{2}\leqq\frac{5(1-r)}{r^2+15}\leqq\frac{6x+4y+5}{4x^2+y^2+15}\leqq\frac{5(1+r)}{r^2+15}\leqq\frac{5}{6}$$

等号成立は $r=3$

等号成立は $x=-\frac{3}{10}r,\ y=-\frac{4}{5}r$

等号成立は $r=5$

以上より．最大値は $\frac{5}{6}$ $\left(x=\frac{9}{10},\ y=\frac{12}{5}\text{ のとき}\right)$ //

最小値は $-\frac{1}{2}$ $\left(x=-\frac{3}{2},\ y=-4\text{ のとき}\right)$ //