0002107902987999

広島市立大学

2015年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$y = x^2 2^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{1-x}}\,dx$

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^9}{n^{10}}+\frac{2^9}{n^{10}}+\frac{3^9}{n^{10}}+\cdots+\frac{n^9}{n^{10}}\right)$$

(1) 両辺対数をとると．

$$\log y = 2\log x + \frac{1}{x}\log 2$$

両辺をxで微分して．

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y} = 2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\log 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 2^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(2x-\log 2)$$

$$\therefore \underline{y' = 2^{\frac{1}{x}}(2x-\log 2)}_{\,//}$$

(2) (i) $x=\sin t$ とおいて置換積分する． $dx = \cos x\cdot dt$

x	$0\to\frac{1}{2}$
t	$0\to\frac{\pi}{6}$

$$(与式) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}_{\,//}$$

(ii) $t = -\sqrt{1-x}$ とおいて置換積分する． $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{1-x}}$ ，

x	$0\to 1$
t	$-1\to 0$

$$\therefore (与式) = \int_{-1}^0 -2t\cdot(e^t)'\,dt$$

$$= \left[-2te^t\right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 2e^t\,dt$$

$$= -\frac{2}{e} + \left[2e^t\right]_{-1}^0$$

$$= \underline{2 - \frac{4}{e}}_{\,//}$$

(3) $$(与式) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{k^9}{n^{10}}$$

区分求積法

よく出る！

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^9$$

$$= \int_0^1 x^9\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{1}{10}}_{\,//}$$