0002125184787999

福島大学

2015年 人文A 第4問

$\boxed{4}$ 次の2つの曲線のどちらにも接する直線の方程式 $y = ax + b$ を求めなさい．

$$\begin{cases} y = -2x^3 + 3 \\ y = -2x^3 - 1 \end{cases}$$

$f(x) = -2x^3 + 3$, $g(x) = -2x^3 - 1$ とおくと,

$f'(x) = g'(x) = -6x^2$

$y = f(x)$ との接点を $(p, -2p^3+3)$, $y = g(x)$ との接点を $(q, -2q^3-1)$ とすると,

接線はそれぞれ $y = -6p^2(x-p) - 2p^3 + 3$, $y = -6q^2(x-q) - 2q^3 - 1$

すなわち, $y = -6p^2x + 4p^3 + 3$, $y = -6q^2x + 4q^3 - 1$

これらはともに $y = ax + b$ を表すから,

$$\begin{cases} a = -6p^2 = -6q^2 & \cdots ① \\ b = 4p^3 + 3 = 4q^3 - 1 & \cdots ② \end{cases}$$

①より, $(p+q)(p-q) = 0$

よって, $q = p$ または, $q = -p$

$q = p$ のときは, ②より, $3 = -1$ となり不適

$q = -p$ のときは, ②より, $p^3 = -\frac{1}{2}$ $\quad \therefore p = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\therefore a = -6 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -3\sqrt[3]{2}$, $b = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + 3 = 1$

$\therefore$ 直線の方程式は, $\underline{y = -3\sqrt[3]{2}\,x + 1}$ //

数理 石井K