0002125724787999

名古屋市立大学

2015年 芸術工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が $\dfrac{a_n-3a_{n+1}}{4(n+1)}=a_na_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されている．ただし，初項 $a_1=1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a_n\neq 0$ を示せ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}+2n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_{n+1}=0$ となる n $(n=1,2,3,\cdots)$ が存在すると仮定する．

(1)(別) 数学的帰納法を使ってもよい

そのとき，$\dfrac{a_n-3a_{n+1}}{4(n+1)}=a_na_{n+1}$ に代入すると，$a_n=0$

これを帰納的に(くり返し)用いることで，$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=a_1=0$

これは $a_1=1$ に矛盾する．よって，すべての自然数 n に対して，$a_n\neq 0$ が成り立つ ▨

(2) 与えられた漸化式の両辺を a_na_{n+1} $(\neq 0)$ で割ると，

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{3}{a_n}}{4(n+1)}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{3}{a_n}=4n+4$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}+2(n+1)=3\left(\frac{1}{a_n}+2n\right)+6$$

$$\therefore\ \underline{b_{n+1}=3b_n+6}\ //$$

(3) (2)の漸化式より，

$$b_{n+1}+3=3(b_n+3)$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n+3\}$ は初項 $b_1+3=\dfrac{1}{a_1}+2+3=6$，公比3の等比数列

よって，
$$\begin{aligned}b_n+3&=6\cdot 3^{n-1}\\&=2\cdot 3^n\end{aligned}$$

$$\therefore\ b_n=2\cdot 3^n-3$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}+2n=2\cdot 3^n-3$$

$$\therefore\ \underline{a_n=\frac{1}{2\cdot 3^n-3-2n}}\ //$$