



2012年理系第2問

2 N を 2 以上の自然数とする。1 から N までの番号を 1 つずつ書いた N 枚のカードから 2 枚を同時に取り出し、そのうち大きい番号を X とし、小さい番号を Y とする。次の問に答えよ。

- (1) i を 1 以上 N 以下の自然数とするとき、 $X = i$ となる確率 p_i および $Y = i$ となる確率 q_i を求めよ。
 (2) X の期待値 E_1 および Y の期待値 E_2 を求めよ。

(1) $X = i$ のとき、 $Y = 1, 2, \dots, i-1$ であるから

$$p_i = \frac{i-1}{N C_2} \quad \therefore p_i = \frac{2(i-1)}{N(N-1)} "$$

$Y = i$ のとき、 $X = i+1, i+2, \dots, N$ であるから

$$q_i = \frac{N-(i+1)+1}{N C_2} \quad \therefore q_i = \frac{2(N-i)}{N(N-1)} "$$

$$\begin{aligned} (2) E_1 &= \sum_{i=1}^N i \cdot p_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{2(i^2-i)}{N(N-1)} \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (i^2-i) \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \left\{ \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{2} N(N+1) \right\} \\ &= \frac{2(N+1)}{3} " \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{i=1}^N i \cdot q_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{2(Ni-i^2)}{N(N-1)} \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \left\{ \frac{N^2}{2} (N+1) - \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \right\} \\ &= \frac{1}{3N(N-1)} \left\{ 3N^2(N+1) - N(N+1)(2N+1) \right\} \\ &= \frac{N+1}{3} " \end{aligned}$$