

2014年第3問

3  $e$ は自然対数の底とする。Oを原点とする座標平面に3点

$$A(e^{-\theta} + \sqrt{3}, e^{-\theta}), \quad B(\cos \theta, \sin \theta), \quad C(\sqrt{3}, 0)$$

がある。ただし、 $\theta \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 三角形ABCの面積を $F(\theta)$ とする。 $F(\theta)$ を求めよ。
- (2)  $F(\theta)$ の導関数を $F'(\theta)$ とする。区間 $0 < \theta < 2\pi$ において $F'(\theta) = 0$ となる $\theta$ の値をすべて求めよ。
- (3)  $n$ を自然数とする。区間 $2(n-1)\pi \leq \theta \leq 2n\pi$ における $F(\theta)$ の最大値、最小値をそれぞれ $\alpha_n, \beta_n$ とする。 $\alpha_n, \beta_n$ を求めよ。また最大値を与える $\theta$ の値と最小値を与える $\theta$ の値を求めよ。
- (4) (3)で求めた $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )に対して、 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ とおく。 $S$ の値を求めよ。