

2012年理（数理情報科）第2問

2  $a$  を実数とし、関数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + (3a^2 - a)x$  について考える。方程式  $f(x) = 0$  の異なる実数解の個数を  $k$  とする。  $f(0) = 0$  であることに注意せよ。

- (1)  $k = 1$  となるような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $k = 2$  となるような  $a$  の値を求めよ。
- (3)  $k = 3$  となるような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (4)  $a$  は (3) で求めた範囲にあるとする。方程式  $f(x) = 0$  の  $0$  以外の実数解を  $\alpha, \beta$  とおく。ただし、 $\alpha < \beta$  とする。
  - (i)  $\alpha < 0$  であることを示せ。
  - (ii)  $\alpha < \beta < 0$  であるような  $a$  の値の範囲を求めよ。
  - (iii)  $\alpha < 0 < \beta$  であるような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (5) 関数  $f(x)$  が極大値と極小値をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (6)  $a$  が (5) で求めた範囲にあるとき、関数  $f(x)$  の極小値を  $m(a)$  とおく。  $a$  が (5) で求めた範囲を動くときの  $m(a)$  の最大値と、最大値を与える  $a$  の値を求めよ。