

2012年教育第4問

4 円 C とその内部の点 P_0 が与えられている. 初め P_0 にある動点が, 円周上の点 P_1 まで線分 P_0P_1 上を動き, P_1 からは, P_1 における円 C の接線 ℓ_1 と線分 P_0P_1 のなす角が ℓ_1 と線分 P_1P_2 のなす角に等しくなるように向きを変えて, 円周上の点 P_2 まで線分 P_1P_2 上を動く (図例 1). 以下, 自然数 n について, 円周上の点 P_n に至ったあとは, P_n における円 C の接線 ℓ_n と線分 $P_{n-1}P_n$ のなす角が ℓ_n と線分 P_nP_{n+1} のなす角に等しくなるように向きを変え, 円周上の点 P_{n+1} まで線分 P_nP_{n+1} 上を動き, この動きをくり返す (図例 2). 線分 P_0P_1 と接線 ℓ_1 のなす角を α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) とする.

- (1) $P_m = P_1$ となる 3 以上の自然数 m が存在するような角 α をすべて決定せよ.
- (2) 点 P_1 の位置によって角 α は変化し得る. 角 α が最大となる P_1 の位置, および最小となる P_1 の位置を求めよ.
- (3) $P_4 = P_1$ となる点 P_1 がとれるような点 P_0 の存在範囲を求めよ.

