0001952817408999

北九州市立大学

2014年 第4問

数理 石井K

4 Oを原点とする座標空間内に3点A(2, 0, 0), B(−2, 2, 0), C(2, −2, 4)がある．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の大きさ $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ を求めよ．また，$\angle BAC=\theta$ とするとき $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) 3点A, B, Cの定める平面を α とし，Oから平面 α に引いた垂線と平面 α との交点をHとする．また，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$, $s+t+u=1$ とする．このときのHの座標を s, t, u を用いて表せ．

(3) Hの座標と線分OHの長さを求めよ．

(4) 四面体OABCの体積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)$ $\quad\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\underline{2\sqrt{5}}$ //

$\overrightarrow{AC}=(0,-2,4)$ $\quad\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\underline{2\sqrt{5}}$ //

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-4}{2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}}=\underline{-\dfrac{1}{5}}$ //

(2) $\overrightarrow{OH}\perp\alpha \iff \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(3)で使う.
(2)では関係ない

$\therefore \overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{OH}=\underline{(2s-2t+2u,\ 2t-2u,\ 4u)}$ //

(3) $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=-4(2s-2t+2u)+4t-4u=-8s+12t-12u$

$\therefore 2s-3t+3u=0 \cdots ①$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=-4t+4u+16u$ $\quad\therefore t-5u=0\cdots ②$

①, ② と $s+t+u=1$ より, $s=\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{5}{12}$, $u=\dfrac{1}{12}$

$\therefore$ (2) より. $\underline{H\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)}$ // $\quad\therefore OH=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\underline{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ //

(4) (1)の $\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$ より. $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$

$\therefore OABC=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH$

$=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$=\underline{\dfrac{8}{3}}$ //