

2013年 医学部 第4問

4 原点を O とする xyz 空間内に 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OPQR$ がある. 点 P, Q, R を通り z 軸に平行な 3 直線と xy 平面との交点をそれぞれ P', Q', R' とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\triangle PQR, \triangle P'Q'R'$ の面積をそれぞれ S, S_1 とする. P, Q, R の 3 点を通る平面と xy 平面のなす角を θ とするとき, $S_1 = S|\cos\theta|$ を示せ.
- (2) O が $\triangle P'Q'R'$ の周上を含む内部にあるとき, z 軸と $\triangle PQR$ の交点を A とする. このとき正四面体 $OPQR$ の体積 V は $V = \frac{1}{3}OA \cdot S_1$ となることを示し, S_1 の最小値を求めよ.
- (3) O が $\triangle P'Q'R'$ の外部にあり, 線分 OP' と線分 $Q'R'$ が交点 B をもつとき, 点 B を通り z 軸に平行な直線と, 直線 OP および直線 QR との交点をそれぞれ C, D とする. このとき四角形 $OQ'P'R'$ の面積を S_2 とすると $V = \frac{1}{3}CD \cdot S_2$ となることを示し, S_2 の最大値を求めよ.