岡山大学

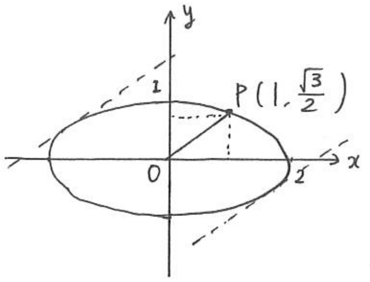
2012年 理系 第1問

増田

$\boxed{1}$ Oを原点とする座標平面における曲線 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる．

(1) C の接線で直線OPに平行なものをすべて求めよ．

(2) 点Qが C 上を動くとき，△OPQの面積の最大値と，最大値を与えるQの座標をすべて求めよ．



(1) 接点の座標を (x_1, y_1) とおくと，
接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{4}+y_1 y = 1$$

$$y = -\frac{x_1}{4y_1}x+\frac{1}{y_1}$$

傾き $-\dfrac{x_1}{4y_1}$ が，直線OPの傾き $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と

等しいので，

$$-\frac{x_1}{4y_1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x_1=-2\sqrt{3}y_1 \cdots ①$$

また，$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 \cdots ②$

②に①を代入して，

$$3y_1^2+y_1^2=1$$

$$y_1=\pm\frac{1}{2}$$

①より　$x_1=\mp\sqrt{3}$　（複号同順）

接点の座標は $\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ と $\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

そのとき接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}y=1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}y=1$$

//

もしくは　$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x\pm 2$

(2) △OPQの面積が最大となるのは，
(1)で求めた接点がQと一致するとき（直線OPとのキョリが最も遠くなるから）

直線 $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}x\mp\frac{1}{2}y=1$ と点 $(0,0)$
のキョリは

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\mp\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

また　(OPの長さ) $=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

よって△OPQの面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{7}}=\underline{1}\ //$$

Qの座標　$\underline{\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)}$ //