2016年 環境科学部・工学部 第2問

$\boxed{2}$ n, p, q ($p \leqq q$) を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

(1) $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)^n \geqq 1+\dfrac{n}{p}$

(2) $\displaystyle\sum_{p=1}^{q} \log_{10}\left(1+\frac{n}{p}\right) \leqq n\log_{10}(1+q)$

(1) 二項定理より $n \geqq 2$ のときは．

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^k\cdot {}_nC_k$$

$$= \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\frac{n}{p}}_{k=1} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{p}\right)^k\cdot {}_nC_k}_{>0}$$

∴ 各 $\left(\frac{1}{p}\right)^k\cdot {}_nC_k > 0$ より． $\left(1+\frac{1}{p}\right)^n > 1+\frac{n}{p}$ が成り立つ

$n=1$ のときは．等号が成り立つ

以上をまとめて． $\left(1+\frac{1}{p}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{p}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ▨

(2) (1)で示した式の両辺．常用対数をとると．

$$\log_{10}\left(1+\frac{n}{p}\right) \leqq \log_{10}\left(1+\frac{1}{p}\right)^n$$

この式の両辺．$p=1,2,\cdots,q$ までの和をとって

$$\sum_{p=1}^{q} \log_{10}\left(1+\frac{n}{p}\right) \leqq \sum_{p=1}^{q} n\log_{10}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$= n\sum_{p=1}^{q} \log_{10}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$= n\log_{10}\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

$$= n\log_{10} \frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdots\cdots\frac{\cancel{q}}{\cancel{q-1}}\cdot\frac{q+1}{\cancel{q}} \quad \text{← 約分}$$

$$= n\log_{10}(1+q)$$ ▨