2016 年 都市教養（文系） 第 2 問

$\boxed{2}$ 数直線上に 2 点 $\mathrm{Q}(-1)$ と $\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$ をとり，線分 QP_1 を $3:1$ に外分する点を P_2，線分 QP_2 を $3:1$ に外分する点を P_3 とする．以下同様に $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し線分 QP_n を $3:1$ に外分する点を P_{n+1} とする．また P_n の座標を a_n とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) A を数直線上の Q と異なる点とする．線分 QA を $3:1$ に外分する点が P_1 であるとき，A の座標 a を求めなさい．

(2) すべての自然数 n に対して

$$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明しなさい．

(3) $999<a_n<9999$ をみたす自然数 n をすべて求めなさい．ただし，本問では $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．